

An uncertainty evaluation method with uncorrected deflection has been considered. We have discussed and classified three types of uncertainty evaluation with uncorrected deflection along a way of thinking of GUM. In addition, a scheme for improving the accuracy of the proposed uncertainty evaluation method is proposed. In the scheme, averaging effect for error distribution is utilized. We have experimentally confirmed the effectiveness of the proposed scheme in the uncertainty evaluation for the gauge block comparator.

Key words: uncertainty, deflection, GUM

1. 緒 言

「不確かさ」(Uncertainty)は測定結果の信頼性の表現方法として広く活用されている。不確かさの定義およびその評価方法は、「計測における不確かさの表現のガイド」(GUM)¹⁾²⁾に規定されている。しかし、現実の不確かさ評価においては、全てGUMに則った手順で容易に評価できるわけではない。例えば、GUMでは、測定値に既知のかたよりがある場合は原則として補正を行うことを薦めているが、実際の不確かさ評価においては、種々の理由から、かたよりを補正せず、不確かさの成分として評価の方が自然な場合がしばしば生じる。そこで文献3)において、GUMには手順が明示されていない、既知のかたよりを補正しない場合の不確かさの評価法に関する考察を行った。

従来のかたよりを補正しない場合の不確かさ評価においては、推定されるかたよりや校正用標準の不確かさといった要因が単純に二乗和の成分として加算されることが多い。文献3)において、データの構造モデルに基づく統計的に厳密な解析をした結果、

- (1)二乗和として単純加算する従来法(I)は、一般に不確かさの過大評価となる、
- (2)GUMの考え方に厳密に沿った、期待値としての不確かさの二乗量(分散)を不偏推定できる方法(II)を構成できる。ただし、かたよりの評価に用いる校正用標準自体の不確かさが大きい場合、この方法では不確かさを過小評価する確率が50%よりも顕著に大きくなる、
- (3)不確かさの分散の不偏推定ではないが、校正用標準の不確かさの大きさにかかわらず、不確かさの過小評価の確率を50%以下に押さえた、簡明な近似的方法(III)が構成可能である、

の三点を明らかにした。

本稿では、まず、文献3)で提示した方法を幾つかの異なる状況に適用し、既知のかたよりを補正しない場合の不確かさ評価の一般的考え方を整理する。次に、評価された不確かさ自体の信頼性を高めるための現実的方法を提案し、

* 原稿受付 平成21年10月9日

** 正 会 員 産業技術総合研究所(茨城県つくば市梅園1-1-1)

*** 正 会 員 群馬県立群馬産業技術センター(群馬県前橋市亀里町884-1)

その適用可能性を実験によって検証する。

2. ブロックゲージの比較測定

本稿では文献3)と同様にブロックゲージの比較測定を事例として考察を行う。ブロックゲージの比較測定において、被校正用ブロックゲージの長さ L は、標準ブロックゲージ(校正証明書に記載された認証値を L_s とする)との比較測定の結果 d を用いて、近似的に

$$L = L_s + d - L_s(\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_s \cdot \delta\theta) \quad (1)$$

と与えられる⁴⁾。ここで、 $\delta\alpha$ は2本のブロックゲージの熱膨張係数の差、 θ は被校正ブロックゲージ温度の基準温度20°Cからの偏差、 α_s は標準ブロックゲージの熱膨張係数、 $\delta\theta$ は2本のブロックゲージの温度差である。現実の校正では、同一ゲージを同一環境で測定するため、 $\delta\alpha = \delta\theta = 0$ と見なして温度測定等は行わず、 $L = L_s + d$ の関係式から L を求めることが一般的に行われている。さらに、 d は比較測長器により求めるが、その際、比較測長器自体がもつかたより D_{bias} の補正を行わない場合が多い。

本稿では上記3量、すなわち

- (1)2本のブロックゲージの比較測定結果 d に含まれる、比較測長器のかたより D_{bias}
- (2)2本のブロックゲージの温度差 $\delta\theta$
- (3)2本のブロックゲージの熱膨張係数の差 $\delta\alpha$

について、これらを補正しない場合の不確かさ評価の方法を文献3)の議論を拡張して整理する。さらに、特に(1)について、その不確かさ評価を高精度化する方法を提案し、実験的に検証する。

3. かたよりを補正しない不確かさ評価の事例

3.1 2本のブロックゲージの比較測定結果の不確かさ

比較測長器による d の測定における不確かさ評価法については文献3)で検討した。本節では、その導出過程をあらためて簡潔に示す。

d に含まれる比較測長器のかたより D_{bias} (その真値を Δ_{bias} と表す)は補正せず、不確かさの成分として考慮する。不確かさ評価のため、校正済みのブロックゲージ2個で構成した基準段差(段差の標準値 l_{ref} 、その不確かさ u_{ref})を準備

する。基準段差の真の値を λ_{ref} とすると、

$$l_{\text{ref}} = \lambda_{\text{ref}} + \gamma \quad (2)$$

と書ける。 γ は標準値に含まれる誤差で、GUM ではこれは何らかの先験的分布¹⁾²⁾に従う確率変数とみなされる。その確率変数としての性質は次で規定される。

$$E[\gamma] = 0, \quad V[\gamma] = E[\gamma^2] = u_{\text{ref}}^2 \quad (3)$$

ここで $E[x]$ 、 $V[x]$ は確率変数 x の期待値及び分散を表す。比較測長器による基準段差の測定結果を x_{ref} とすると、

$$\begin{aligned} D_{\text{bias}} &= x_{\text{ref}} - l_{\text{ref}} \\ &= \Delta_{\text{bias}} + \varepsilon_{\text{ref}} - \gamma \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる。 ε_{ref} は x_{ref} に含まれる誤差の内の偶然的成分 (ばらつき) の寄与である。文献3)の解析によると、 D_{bias} を補正しない比較測定結果 d_{nc} に対する標準不確かさ $u(d_{\text{nc}})$ の評価は、 Δ_{bias}^2 の統計的推定に帰着する。厳密法 (II) は、 Δ_{bias}^2 に対する不偏推定を利用するもので、この推定式は式(4)から次で与えられることが証明できる。

$$\widehat{\Delta_{\text{bias}}^2} = D_{\text{bias}}^2 - \frac{s^2}{n_{\text{ref}}} - u_{\text{ref}}^2 \quad (5)$$

ただし、右辺が負になる場合は $\widehat{\Delta_{\text{bias}}^2}$ はゼロとする。 \wedge (ハット) は推定値を表し、 s^2 は繰り返し測定の際のばらつきを表す実験分散、 n_{ref} は x_{ref} を求める際の繰り返し数である。式(5)から、ブロックゲージ校正時の測定値 d に対する標準不確かさの二乗 (分散) は、校正時の測定ばらつきを考慮することにより、次で与えられる。

$$u_{\text{II}}^2(d_{\text{nc}}) = \begin{cases} D_{\text{bias}}^2 - s^2/n_{\text{ref}} - u_{\text{ref}}^2 + s^2/n, & \text{if } D_{\text{bias}}^2 - s^2/n_{\text{ref}} - u_{\text{ref}}^2 \geq 0 \\ s^2/n, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

n は被校正ブロックゲージに対する測定の際の繰り返し数である。なお n_{ref} は、通常、ばらつきの影響 s^2/n_{ref} が u_{ref}^2 と比較して無視できる程度に十分に大きな値が選択される。

一方、式(4)にもとづく推定式 $\widehat{\Delta_{\text{bias}}^2} = D_{\text{bias}}^2$ の両辺の二乗を、近似的に、 Δ_{bias}^2 の推定値として用いることにより、次の評価 (方法 III) が得られる。

$$u_{\text{III}}^2(d_{\text{nc}}) = D_{\text{bias}}^2 + s^2/n \quad (7)$$

また、従来法 I では、上記のような厳密な導出によらず、不確かさの成分が機械的に次のように単純に加算される⁴⁾。

$$u_{\text{I}}^2(d_{\text{nc}}) = D_{\text{bias}}^2 + s^2/n_{\text{ref}} + u_{\text{ref}}^2 + s^2/n \quad (8)$$

不確かさの分散の「真値」は、繰り返し測定の際のばらつきの母分散を σ^2 で表すと $\Delta_{\text{bias}}^2 + \sigma^2/n$ である。方法 II はこれに対する不偏推定 (すなわち $E[u_{\text{II}}^2(d_{\text{nc}})] = \Delta_{\text{bias}}^2 + \sigma^2/n$) を与えるが、個々の $u_{\text{II}}^2(d_{\text{nc}})$ が $\Delta_{\text{bias}}^2 + \sigma^2/n$ より小さくなる確率は系統的に 50% よりも大きい³⁾。さらに、 u_{ref} の大きさはしばしば安全側として過大評価されるため、現実には式(6)は不確かさの過小評価となる危険性が高い。

方法 III はこの欠点を解消し得るもので、 $u_{\text{III}}^2(d_{\text{nc}})$ の期待値は $\Delta_{\text{bias}}^2 + \sigma^2/n$ の過大評価となるものの、個々の $u_{\text{III}}^2(d_{\text{nc}})$ が $\Delta_{\text{bias}}^2 + \sigma^2/n$ の過大もしくは過小評価となる確率は、 $\Delta_{\text{bias}}/u_{\text{ref}}$ の広い範囲にわたってほぼ 50% となることがわかっている³⁾。また、方法 III は表式が簡明という長所もあるため、現実的な評価方法と考えられる。従来法 I は、不確かさ成分が機械的に合成されたもので、不確かさの分散の不偏推定とはなっておらず、期待値としては不確かさの過大評価となっている。

3.2 2本のブロックゲージの温度差の不確かさ

次に、式(1)における2本のブロックゲージの温度差 $\delta\theta$ の不確かさを検討する。記号を明確にするため、 L の校正時点における温度差の真値を μ_0 とし、 $\delta\theta$ は式(1)中で用いる μ_0 の推定値を表すものとする。なお以下では混乱を生じない範囲で、3.1 で用いた記号を別の量の表現に用いることがある。

すでに述べたように L の校正は温度差がゼロとの想定で行われることが多い。この想定は

$$\delta\theta_{\text{nc}} = 0 \quad (9)$$

で表される。 $\delta\theta_{\text{nc}}$ を用いることによる不確かさ $u(\delta\theta_{\text{nc}})$ は、文献3)の式(17)と同様の考え方にもとづき、次式で評価される。

$$u^2(\delta\theta_{\text{nc}}) = E[(\delta\theta_{\text{nc}} - \mu_0)^2] = E[\mu_0^2] \quad (10)$$

右辺の評価のために、温度差の測定が必要である。この際、温度差の測定は L の校正とは一般に別の機会に行われること (不確かさ評価のための温度測定)、また温度差には時間的変動があり得ることを考慮する。温度差 μ の長期間にわたる平均 (母平均) を μ_{ave} 、時間による変動成分を ζ とすると、

$$\mu = \mu_{\text{ave}} + \zeta \quad (11)$$

と書ける。 ζ の分散を σ_{ζ}^2 として、 $E[\zeta] = 0$ 、 $V[\zeta] = E[\zeta^2] = \sigma_{\zeta}^2$ である。 μ_0 は μ の標本の一つであるから、式(10)、(11)より次を得る。

$$u^2(\delta\theta_{\text{nc}}) = \mu_{\text{ave}}^2 + \sigma_{\zeta}^2 \quad (12)$$

μ の測定を、日を変えて n_{T} 回行うとし、各回測定時の温度差の真値を μ_i 、これに対する測定データを δT_i と表すと、以下が成立する。

$$\delta T_i = \mu_i + \gamma + \varepsilon_i = (\mu_{\text{ave}} + \zeta_i) + \gamma + \varepsilon_i \quad (13)$$

ここで γ 、 ε_i は温度差測定のかたよりとばらつきで、それぞれの期待値と分散は、温度差測定の A タイプ不確かさ u_{TA} と B タイプ不確かさ u_{TB} (いずれも既知量とする) を用いて次のように表される。

$$E[\gamma] = 0, \quad V[\gamma] = E[\gamma^2] = u_{\text{TB}}^2 \quad (14)$$

$$E[\varepsilon_i] = 0, \quad V[\varepsilon_i] = E[\varepsilon_i^2] = u_{\text{TA}}^2 \quad (15)$$

式(14)の前式は δT_i が μ_i の最良推定値であることによる。 δT_i の i についての平均を $\overline{\delta T}$ とすると、式(13)から次を得る。

$$E[\overline{\delta T}^2] = \mu_{ave}^2 + \frac{\sigma_T^2}{n_T} + \frac{u_{TA}^2}{n_T} + u_{TB}^2 \quad (16)$$

ただし、 $\zeta_i, \gamma, \varepsilon_i$ は独立と仮定した。同様に、 δT_i の実験分散 $s_{\delta T}^2 = \sum(\delta T_i - \overline{\delta T})^2 / (n_T - 1)$ に対して次が得られる。

$$E[s_{\delta T}^2] = \sigma_T^2 + u_{TA}^2 \quad (17)$$

式(16), (17)から、 μ_{ave}^2 と σ_T^2 の推定値 $\widehat{\mu_{ave}^2}$, $\widehat{\sigma_T^2}$ が次のように求まる。

$$\widehat{\mu_{ave}^2} = \overline{\delta T}^2 - u_{TB}^2 - \frac{s_{\delta T}^2}{n_T} \quad (18)$$

$$\widehat{\sigma_T^2} = s_{\delta T}^2 - u_{TA}^2 \quad (19)$$

式(18), (19)で右边が負になる場合はそれぞれゼロで置き換える。ただし、以下では表式を簡単にするため、いずれの右边も負でない場合について記す。式(12)の右边をその推定値で置き換え、式(18), (19)を用いることにより、 $u^2(\delta\theta_{nc})$ に対するかたよりのない推定 $u_{II}^2(\delta\theta_{nc})$ として次の表式が得られる。

$$u_{II}^2(\delta\theta_{nc}) = \overline{\delta T}^2 + \frac{n_T - 1}{n_T} s_{\delta T}^2 - u_{TA}^2 - u_{TB}^2 \quad (20)$$

ここで、Bタイプ不確かさ u_{TB} は温度計に対する校正証明書等から求めることができる。また、Aタイプ不確かさ u_{TA} は、各測定データ δT_i を多数回の平均値とすることにより、ほぼ無視できる大きさにすることが可能である ($u_{TB} \gg u_{TA}$)。さらに、温度測定データのデータ数 n_T は、一般的に1と比べて十分大きい値 ($(n_T - 1)/n_T \approx 1$) とするので、現実的な $u_{II}^2(\delta\theta_{nc})$ は

$$u_{II}^2(\delta\theta_{nc}) = \overline{\delta T}^2 + s_{\delta T}^2 - u_{TB}^2 \quad (20')$$

と与えられる。一方、前節と同様に、温度計の校正不確かさ u_{TB} はしばしば過大評価されることを考慮し、これを式(20')右边から減ずることによる $u^2(\delta\theta_{nc})$ 自体の過小評価を避けることにより、式(20')よりもさらに簡明な次の表式を得る。

$$u_{III}^2(\delta\theta_{nc}) = \overline{\delta T}^2 + s_{\delta T}^2 \quad (21)$$

また、不確かさの分散成分を単純に加算する方Iでは、式(20), (21)に換えて次のようになる。

$$u_I^2(\delta\theta_{nc}) = \overline{\delta T}^2 + s_{\delta T}^2 + u_{TB}^2 \quad (22)$$

3.3 2本のブロックゲージの熱膨張係数の差の不確かさ

2本のブロックゲージの熱膨張係数の差 $\delta\alpha$ の不確かさ評価では、比較測長器や温度差の場合と異なり、一般に不確かさ評価のための測定は行わず、ブロックゲージメーカーからの提供値やJIS規格での規定値などの外部情報を利用する。被校正ブロックゲージ及び標準ブロックゲージの熱膨張係数に対するこのような外部情報にもとづく値をそれぞれ α, α_S 、対応する熱膨張係数の真値を μ, μ_S とする。熱膨張係数にはブロックゲージ毎のばらつきが存在することを考慮して、 μ は次のように表せる。

$$\mu = \mu_{ave} + \zeta \quad (E[\zeta] = 0, \quad V[\zeta] = E[\zeta^2] = u_G^2) \quad (23)$$

μ_{ave} は多くのブロックゲージについての平均(母平均)、 ζ は変動成分を表し、その分散を u_G^2 としている。一方、 α に含まれる測定誤差を ε 、その分散を u_M^2 とすると、

$$\alpha = \mu_{ave} + \varepsilon \quad (E[\varepsilon] = 0, \quad V[\varepsilon] = E[\varepsilon^2] = u_M^2) \quad (24)$$

であり、これらから次式を得る。

$$\alpha = \mu - \zeta + \varepsilon \quad (25)$$

同様に、 α_S は次のように表すことができる。

$$\alpha_S = \mu_S - \zeta_S + \varepsilon_S \quad (26)$$

ただし、 $E[\zeta_S] = E[\varepsilon_S] = 0, \quad V[\zeta_S] = E[\zeta_S^2] = u_{SG}^2, \quad V[\varepsilon_S] = E[\varepsilon_S^2] = u_{SM}^2$ とする。

いま、熱膨張係数の差の見かけの値(不確かさ評価で用いるもの)を $D_\alpha (= \alpha - \alpha_S)$ 、真の値を $\delta\mu (= \mu - \mu_S)$ とし、また式(1)中で用いる $\delta\mu$ の推定値を $\delta\alpha$ と表記する。補正を実施しない場合の $\delta\alpha$ は

$$\delta\alpha_{nc} = 0 \quad (27)$$

と書け、これに付随する不確かさは次式で評価することができる。

$$u^2(\delta\alpha_{nc}) = E[(\delta\alpha_{nc} - \delta\mu)^2] = E[\delta\mu^2] \quad (28)$$

一方、式(25), (26)より次を得る。

$$D_\alpha + \zeta - \zeta_S = \delta\mu + \varepsilon - \varepsilon_S \quad (29)$$

式(23), (24)から、 μ は ζ と、 α は ε と相関をもつが、 μ と ε 、及び α と ζ はそれぞれ独立な確率変数であることに注意する。同様に μ_S と ε_S 、 α_S と ζ_S は独立である。その結果、式(29)左辺の3つの変数、及び右辺の3つの変数はそれぞれ独立である。これに注意して、両辺の二乗の期待値をとることにより次を得る。

$$E[\delta\mu^2] = D_\alpha^2 + u_G^2 + u_{SG}^2 - u_M^2 - u_{SM}^2 \quad (30)$$

ただし、 ζ と ζ_S 、及び ε と ε_S はそれぞれ互いに独立と仮定した。式(28)と(30)より、 $u^2(\delta\alpha_{nc})$ をかたよりになく推定する表式として次を得る。

$$u_{II}^2(\delta\alpha_{nc}) = D_\alpha^2 + u_G^2 + u_{SG}^2 - u_M^2 - u_{SM}^2 \quad (31)$$

式(31)では、 u_G^2 と u_{SG}^2 はプラスの符号で、 u_M^2 と u_{SM}^2 はマイナスの符号で含まれていることが注目される。熱膨張係数の物理的ばらつきを表す成分は加法的に合成されるが、測定起源の成分はその効果がすでに D_α^2 に含まれるため、これを相殺するために減算する必要があることによる。

前節までと同様に、式(31)に対応する方法IIIおよびIでの評価式はそれぞれ次のようになる。

$$u_{III}^2(\delta\alpha_{nc}) = D_\alpha^2 + u_G^2 + u_{SG}^2 \quad (32)$$

$$u_I^2(\delta\alpha_{nc}) = D_\alpha^2 + u_G^2 + u_{SG}^2 + u_M^2 + u_{SM}^2 \quad (33)$$

一般的に、ブロックゲージの熱膨張係数はJIS規格などにより、 $11.5 \pm 1 \times 10^{-6}$ 1/K といった形で与えられる。通常、ここでの分布幅 $\pm 1 \times 10^{-6}$ 1/K は殆どブロックゲージ毎の熱膨

張係数のばらつきによって決まると考えられる ($u_G \gg u_M$, $u_{SG} \gg u_{SM}$). この場合、熱膨張係数の不確かさは、近似的に $u(\alpha) = u_G$, $u(\alpha_S) = u_{SG}$ となる (上記の例の場合 $u(\alpha) = 1/\sqrt{3} \times 10^{-6}$ 1/K). さらに、式(31)~(33)の不確かさは全て同じとなり

$$u^2(\delta\alpha_{nc}) = D_\alpha^2 + u^2(\alpha) + u^2(\alpha_S) \quad (34)$$

と与えられる.

3.4 不確かさ評価の相互関係

以上の3種類の量についての、既知のかたよりを補正しない場合の不確かさ評価の相互の関係を表1に整理する.

厳密法 II では、かたよりの推定値に何らかの測定誤差が含まれる場合は、その分散は不確かさの分散の表式において減算で現れる. 一方、対象量自体が物理的に変動する場合、それに伴う不確かさの分散は加算されるという一般的傾向に気がつく. ただし物理的な変動成分は、 $\delta\theta$ の場合のように、 $(n_T - 1)/n_T$ といった係数を伴うことがあり、厳密な表式は個別の状況毎にデータの構造モデルを設定して導出する必要がある.

評価方法 III の表式は、これに比べていずれも簡明で、不確かさの分散に対するかたよりの寄与は、いずれもかたよりの推定値の単純な二乗である. また、すでに述べたように、標準や測定の不確かさが安全側に過大評価されていても方法 II のような過小評価の危険性が生じない点で、方法 III は現実的な選択と考えられる. ただし、方法 III は不確かさの不偏推定ではなく、一般に過大側にかたよりのある推定となる.

方法 I の表式は表1には記載していないが、不確かさの分散の不偏推定には基づいておらず、方法 III と比較してさらに過大評価を与えるもので、過小評価を避け安全側に立った評価方式となっている. ただし、熱膨張係数差の不確かさの様に、減算成分が他の成分に比べ十分に小さい場合は、3つ評価法で全て同じ不確かさが得られる.

4. 不確かさ評価の高精度化

4.1 多数の基準段差を用いる高精度化の提案

この節では、3.1に述べた2本のブロックゲージの比較測定を対象に、不確かさ評価の高精度化の方法を検討する. 既に述べたように、厳密法 II の問題は、式(6)右辺にマイナスの分散成分が現れることから、不確かさの過小評価の危険性が高くなることである. これは、基準段差の不確かさ u_{ref} のために、 Δ_{bias}^2 の厳密な推定ができないことに起因する. この問題は、多数の基準段差を用いて、 Δ_{bias}^2 の推定精度を上げることで低減できると考えられる.

いま N_{ref} 個の基準段差を準備したとし、第 i 基準段差 (標準値 $l_{ref,i}$) を用いて求まる Δ_{bias} の推定値を $D_{bias,i}$, その i についての平均を \bar{D}_{bias} とすると、次式が得られる.

$$\bar{D}_{bias} = \Delta_{bias} + \bar{\varepsilon}_{ref} - \bar{\gamma} \quad (35)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}_{ref}$ は第 i 基準段差の測定結果 $x_{ref,i}$ に含まれる誤差の内の偶然的成分 (ばらつき) の i についての平均を表し、 $\bar{\gamma}$ は $l_{ref,i}$ がもつ誤差 γ_i の i についての平均を表す. γ_i が互いに独立であるとき $\bar{\gamma}$ に関しては、式(3)と同様に

$$\begin{aligned} E[\bar{\gamma}] &= 0, \\ E[\bar{\gamma}^2] &= \sigma_{ref}^2 / N_{ref} \end{aligned} \quad (36)$$

の関係式が成立する. 式(35) 両辺の二乗の期待値をとり、項を一部入れ替えることにより、 Δ_{bias}^2 は次により推定できる.

$$\widehat{\Delta_{bias}^2} = \bar{D}_{bias}^2 - \frac{s^2}{n_{ref} N_{ref}} - \frac{u_{ref}^2}{N_{ref}} \quad (37)$$

これを用いて式(6)は次のように書き換えられる.

Table 1 3種類の量に対する、既知のかたよりを補正しない場合の不確かさ評価の関係

対象量	d (長さの差)	$\delta\theta$ (温度差)	$\delta\alpha$ (熱膨張係数の差)
対象量に含まれるかたよりと変動成分の推定方法	測定	測定	外部情報
対象量に含まれるかたよりの推定値	D_{bias} (比較測長器指示値と標準段差の標準値の差)	$\overline{\delta T}$. (温度差の測定値の平均)	D_α (外部情報による熱膨張係数の差)
かたよりの推定値に含まれる測定誤差	繰り返し測定のばらつき及び標準段差の不確かさ	温度差測定のばらつきとかたより	α, α_S に含まれる測定誤差
上記の分散の推定値	$\frac{s^2}{n_{ref}} + u_{ref}^2$	$u_{TA}^2 + u_{TB}^2$ ($u_{TA} \ll u_{TB}$)	$u_M^2 + u_{SM}^2$
対象量に含まれる変動成分	変動成分なし	温度差の時間的変動	ブロックゲージ毎の熱膨張係数のばらつき
上記の分散の推定値	—	$\frac{n_T - 1}{n_T} s_{\delta T}^2$ ($\cong s_{\delta T}^2$)	$u_G^2 + u_{SG}^2$ ($\gg u_M^2 + u_{SM}^2$)
方法 II における不確かさ分散の表式	$D_{bias}^2 - \frac{s^2}{n_{ref}} - u_{ref}^2 + \frac{s^2}{n}$	$\overline{\delta T}^2 + \frac{n_T - 1}{n_T} s_{\delta T}^2 - u_{TA}^2 - u_{TB}^2$ ($\cong \overline{\delta T}^2 + s_{\delta T}^2 - u_{TB}^2$)	$D_\alpha^2 + u_G^2 + u_{SG}^2 - u_M^2 - u_{SM}^2$ ($\cong D_\alpha^2 + u_G^2 + u_{SG}^2$)
方法 III における不確かさ分散の表式	$D_{bias}^2 + \frac{s^2}{n}$	$\overline{\delta T}^2 + s_{\delta T}^2$	$D_\alpha^2 + u_G^2 + u_{SG}^2$

$$u_{II}^2(d_{nc}) = \begin{cases} \overline{D}_{bias}^2 - \frac{s^2}{n_{ref} \cdot N_{ref}} - \frac{u_{ref}^2}{N_{ref}} + s^2/n, & \text{if } \overline{D}_{bias}^2 - \frac{s^2}{n_{ref} \cdot N_{ref}} - \frac{u_{ref}^2}{N_{ref}} \geq 0 \\ s^2/n, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (38)$$

一方、近似法 III は式(37)にかえて Δ_{bias}^2 の推定を \overline{D}_{bias}^2 で行うものであり、次の表式を得る。

$$u_{III}^2(d_{nc}) = \overline{D}_{bias}^2 + \frac{s^2}{n} \quad (39)$$

式(38)を式(6)と比較すると、基準段差の不確かさの影響が $1/N_{ref}$ となっていることがわかる。また、 N_{ref} および n_{ref} が大きくなるとともに、式(38)は式(39)に収束する。すなわち、たとえ基準段差の不確かさが不明であったとしても、使用する多数の基準段差における真値からの誤差が独立であれば、 N_{ref} が大きくなるとともに平均効果により $\bar{r} \rightarrow 0$ と確率収束するため、式(39)を用いて妥当な不確かさの推定が可能である。

実際の不確かさ評価に使用される基準段差の校正不確かさは 15 nm 程度である。また、比較測長器のかたよりの真値は 10~20 nm 程度と推定される。現実的に可能な 5 個程度の基準段差を使用するとし、かたよりの推定値 (測定値) が 15 nm であった場合、式(6)で与えられる不確かさは、ばらつき成分を無視すると、 $u_{II}(d_{nc}) = 0$ となり、明らかに過小評価になる。しかし、式(38)によれば $u_{II}(d_{nc}) = 13.4$ nm、また近似式(39)では $u_{III}(d_{nc}) = 15$ nm となり、方法 II と III で概ね同程度の評価結果となる。

以上から、 u_{ref} に起因する不確かさ評価の問題点を回避するための方法として、複数の基準段差を利用する厳密法(II)、もしくは近似法(III)が有効と考えられる。不確かさをできるだけ厳密に評価する必要がある場合には前者が、不確かさの過大評価を許容しても簡便な評価が望まれる場合は後者が適している。 N_{ref} および n_{ref} が十分大きい場合は、両者の結果は一致する。従って、 Δ_{bias} の推定が十分に高い信頼性で行えると考えられるときには、方法 III の評価式を使うことが現実的であろう。

4.2 実験的検証

ここでは、4.1 節で提案した手法において、実際に複数の段差を利用して比較測長器の不確かさ評価を行う場合の現実的考案とその効果の確認結果について述べる。

実際の比較測長器におけるかたよりの真値 Δ_{bias} は一定値ではなく、段差値 (測定値) に依存して分布があると考えられる。一般に、評価する段差範囲は $\pm 4 \mu\text{m}$ 、間隔は $1 \mu\text{m}$ 毎とすれば十分である。通常の比較測長器の不確かさ評価においては、基準ブロックゲージ (光波干渉計により校正済み) の中から、1.000~1.010 mm 程度までのブロックゲージを利用して $\pm 4 \mu\text{m}$ の基準段差を、各段差値において一組のみ構成し (一組のブロックゲージ対)、各ゲージの校正値から計算されるゲージ間の差分値 (段差の標準値) と測定値との比較を行う。ブロックゲージ対を利用して基準段差を作製する場合、段差の標準値に対する不確かさは、原則的にはブロックゲージに付与された絶対長さの校正不確かさの $\sqrt{2}$ 倍となる。しかしながら、実際には、同一機関でブロックゲージが校正された場合、共通のかたより誤差が含

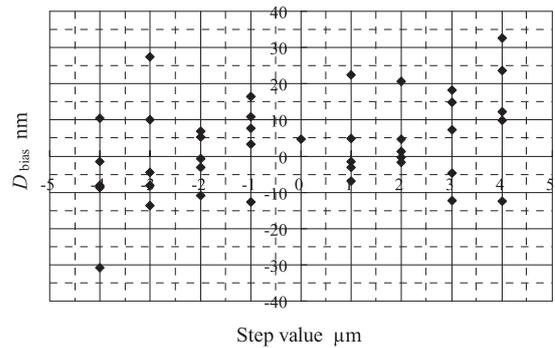


Fig. 1 Measurement results of D_{bias}

まれるため、 $\sqrt{2}$ 倍の不確かさは過大評価となっている可能性が高い。

一方、1.000~1.010 mm までのブロックゲージ 12 本を組み合わせて利用することにより (ある長さのブロックゲージは 2 本使用)、 $\pm 4 \mu\text{m}$ の各段差値において、独立した 5 個の基準段差 (5 組のブロックゲージ対) を構成することが可能である。1 mm 程度の基準ブロックゲージの絶対長さを光波干渉計により校正する場合、不確かさの主要因は、干渉信号の測定誤差、ベースプレートとブロックゲージ間のリングングによって生じる誤差、機械的長さに対する光学的長さの補正誤差である。この中で上述した共通のかたより誤差を除いて考えると、これらの不確かさ要因は全てばらつき成分と推定できる。つまり、呼び寸法がほぼ同じである複数のブロックゲージを用いて独立した基準段差を複数作製することにより、4.1 節で述べた誤差が独立の状態、つまり、真値からの誤差が適当にばらついた状態を実現できると考えられる。

上述の方法で実際に比較測定を実施した結果を図 1 に示す。使用した比較測長器はミットヨ製 GBCD-100A であり、プローブには電気マイクロメータが用いられている。横軸は段差の大きさ、縦軸は光波干渉計によるブロックゲージ校正値から求めたそれぞれの基準段差の標準値と比較測長結果との差 (かたより D_{bias}) である。なお、測定のばらつきを低減するため、一組のブロックゲージ対に対して 5 回の繰り返し測定を行い、その平均値を一個の基準段差の測定値としている。また、段差値が $0 \mu\text{m}$ の場合は、一つのブロックゲージにおける 25 回の繰返し測定を行ったものの平均値である。図 1 より、それぞれの段差値において、5 通りの組合せによるかたより値 D_{bias} は適当にばらついていることが分かる。

図 2 に図 1 で示した各段差でのかたより値を平均化したもの (実線)、及び、各段差を適当に選択したブロックゲージで 1 通りだけ作製して比較測定を行ったもの (点線) を示す。両者を比較すると、各段差において 5 個の基準段差 (5 組のブロックゲージ対) に対するかたより値の平均値で評価した場合の方が、誤差ばらつきの平均効果により分布のばらつきが低減され、かたより値の分布が直線に近づいていることが分かる。つまり、各段差値において 1 個のみの基準段差を用いた場合のかたよりの測定値 D_{bias} の分布のばらつき (点線) は、基準段差の校正値における誤差のばらつき成分によるものと推定できる。なお、かたより値の分布に直線成分 (比例成分) 以外のバイアス成分が、0 点も含

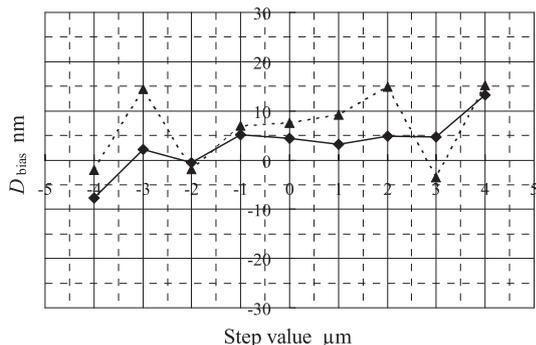


Fig. 2 Averaged distribution of measured D_{bias}

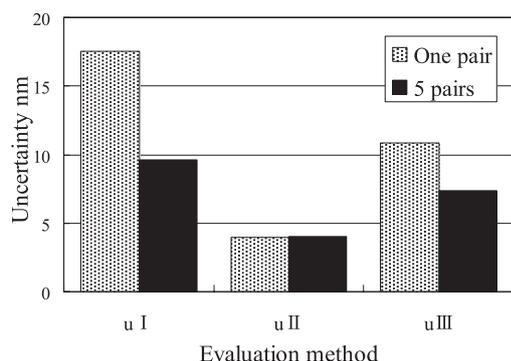


Fig. 3 Comparison of uncertainty evaluation method

めて存在することが図 2 の実線より分かるが、この物理的な原因については不明である。

図 2 の実線で示したかたより D_{bias} の分布より推定されるかたよりを補正しない場合の不確かさは、

$$u_{II}^2(d_{nc}) = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_j \bar{D}_{biasj}^2 - \frac{s^2}{n_{ref} \cdot N_{ref}} - \frac{u_{ref}^2}{N_{ref}} + s^2/n, & \text{if } \frac{1}{M} \sum_j \bar{D}_{biasj}^2 - \frac{s^2}{n_{ref} \cdot N_{ref}} - \frac{u_{ref}^2}{N_{ref}} \geq 0 \\ s^2/n, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (40)$$

$$u_{III}^2(d_{nc}) = \frac{1}{M} \sum_j \bar{D}_{biasj}^2 + s^2/n \quad (41)$$

と与えられる (付録参照)。ここで、 M は不確かさ評価に使用した段差値の点数であり、図 2 の実験の場合、 $\pm 4 \mu\text{m}$ の範囲において間隔 $1 \mu\text{m}$ 毎であるので、 $M=9$ である。また、 N_{ref} は各段差において使用した基準段差の数 (ブロックゲージ対の数) であるので $N_{ref}=5$ 、 n_{ref} は一つの基準段差における測定回数であるので $n_{ref}=5$ である。 \bar{D}_{biasj} は各段差値において得られた N_{ref} 個のかたより値の平均値を表しており、 $j=1 \sim M$ である。なお、 $M=1$ の場合、式(40)、(41)はそれぞれ、式(38)、(39)と一致する。

以上の不確かさ評価式において、基準段差が 1 個の場合と 5 個の場合について、実験結果をあてはめて計算した結果を図 3 に示す。それぞれの段差値のかたより評価を 5 個のブロックゲージの平均値で行った場合、明らかに従来法 (I) と厳密法 (II)、近似法 (III) の間の差が小さくなっている

ことが分かる。以上の結果より、通常の校正済みブロックゲージを基にした複数組の基準段差測定によって、不確かさの過大評価や過小評価の確率が低減できることが確認できた。

4.3 考察

4.1 および 4.2 節より、比較測長器の不確かさ評価においては、複数の基準段差を用いることにより、基準段差が持つ誤差の影響を平均効果により低減できることを確認した。3.2 節で述べたブロックゲージの温度差の不確かさにおいて同様の効果 (減算成分の低減効果) を実現するためには、式(20)より、温度差測定誤差が独立にばらついた温度計を複数個用意する必要がある、現実的ではない。さらに、たとえ温度計を複数個用意したとしても、温度計の校正を同一機関で行った場合、共通の誤差成分が含まれる可能性が高く、誤差が独立にばらつく状況を実現できないと思われる。つまり、何らかの測定器によって不確かさ評価を行う場合は、4.1 節で述べた不確かさ評価における信頼性の向上法は現実的には適用できないケースが多いと考えられる。

5. 結 言

本報告では、文献 3) で提案したかたよりを補正しない場合の不確かさ評価法の議論を拡張し、幾つかの異なる状況での不確かさ評価の事例を考察した。次に、評価された不確かさ自体の信頼性を高めるための現実的方法提案し、その有効性を実験的に実証した。結果を以下に要約する。

- (1) かたよりの推定値に何らかの測定誤差が含まれる場合、その分散は不確かさの分散の表式において減算で現れるが、対象量自体が物理的に変動する場合は、それに伴う不確かさの分散は加算される
- (2) 基準器を用いて不確かさの評価を行う場合、誤差の適当にばらついた多数の基準器を用いることにより、提案した不確かさ評価式の信頼性を高めることができる。
- (3) 比較測長器の不確かさ評価においては、複数の基準ブロックゲージの差分値を基準段差としてうまく利用することにより、真値からの誤差ばらつきの平均効果を実現できる。
- (4) 測定器により不確かさ評価を行う場合、(2) の手法は現実的には適用できない。不確かさの過小評価に留意する必要がある

GUM における不確かさ評価法はあくまでも確率分布を基軸としており、個々の事例においては過小評価も過大評価も有り得ることを許容している。しかし、一方で GUM における「妥当な不確かさ」と、実用上の「適切な不確かさ」は必ずしも一致しない。個々の事例において、GUM の考え方を尊重しつつ、「適切な不確かさ」の評価法を検討していく必要があると思われる。

付 録

ここでは、式(40)、(41)を導出する。各段差値におけるかたよりの真値を Δ_{biasj} とすると、各段差値において、複数の基準段差を用いた場合の平均値として、

$$\bar{D}_{biasj} = \Delta_{biasj} + \bar{\varepsilon}_{ref} - \bar{\gamma}_j \quad (A1)$$

が成立する。ここで、 $\bar{\gamma}_j$ は j 番目の段差値 (例えば $3 \mu\text{m}$)

において使用した複数の基準段差の誤差の平均値であり、使用したブロックゲージに付与された不確かさは全て同じであるので、3.1節と同様に $E[\bar{\gamma}_j^2]$ は $u_{\text{ref}}^2/N_{\text{ref}}$ により推定できる。また、測定のみつき成分 ε_{ref} は各段差値で同一と見なした。式(A1)の両辺の2乗の期待値を求めた上で、 j に関する平均を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_j E[\bar{D}_{\text{bias}j}^2] &= \frac{1}{M} \sum_j E[(\Delta_{\text{bias}j} - \bar{\gamma}_j + \varepsilon_{\text{ref}})^2] \\ \frac{1}{M} \sum_j \bar{D}_{\text{bias}j}^2 &= \frac{1}{M} \sum_j \Delta_{\text{bias}j}^2 + E[\bar{\gamma}_j^2] + E[\varepsilon_{\text{ref}}^2] \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

が成立する。式(A2)において、不確かさを評価したい範囲のかたよりの真値の統計的推定を右辺第1項から求めること

により、

$$\widehat{\Delta_{\text{bias}}^2} = \frac{1}{M} \sum_j \bar{D}_{\text{bias}j}^2 - \frac{u_{\text{ref}}^2}{N_{\text{ref}}} - \frac{s^2}{n_{\text{ref}} N_{\text{ref}}} \quad (\text{A3})$$

が得られ、式(A3)より、式(40)、(41)を得ることが出来る。

参考文献

- 1) BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, OIML, Guide to the expression of uncertainty in measurement, ISO (1993).
- 2) 飯塚幸三監修：計測における不確かさの表現のガイド，日本規格協会，(1996).
- 3) 尾藤洋一，榎原研正：既知のかたよりを補正しない場合の不確かさ評価に関する一考察，精密工学会誌，**74**，6(2008)。
- 4) 首藤俊二：ブロックゲージ比較測定における不確かさ，精密工学会誌，**65**，7(1999)953.